$6\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}+5\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$ を満たす四面体 ABCD と点 P がある.

(1) 点 P はどのような位置にあるか.

(2) 4 つの四面体 PBCD, PCDA, PDAB, PABC の体積比を求めよ.

$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}+d\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$ を満たす点 P の位置

平面の $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たす点 P の位置問題と同様に考える.
始点を A に統一して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求め, 無理矢理**内分点の公式の形**に変形する.
これで, **P が A から見てどんな位置にあるか**が求まる.

(1) $-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+5(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{18}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$
$$=\frac{1}{18}\left(7\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

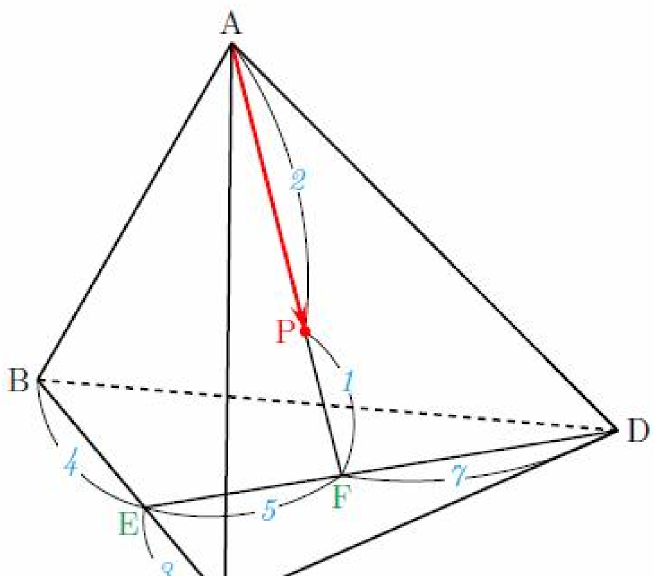
ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$ とおくと　[E は BC を 4 : 3 に内分]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{18}(7\overrightarrow{\mathrm{AE}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\frac{1}{18}\left(12\cdot\frac{7\overrightarrow{\mathrm{AE}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5+7}\right)$$

さらに, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AE}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5+7}$ とおくと　[F は ED を 5 : 7 に内分]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{18}\cdot 12\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

線分 BC を 4 : 3 に内分する点を E とし,
線分 ED を 5 : 7 に内分する点を F とすると
点 P は, 線分 AF を 2 : 1 に内分する位置にある.



[始点を A に統一するために, 差に分解する.　$\overrightarrow{\square\triangle}=\overrightarrow{\mathrm{A}\triangle}-\overrightarrow{\mathrm{A}\square}$
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の形にした後, まず $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を内分点の公式の形に変形する.
分母に 4 + 3 をおき, つじつまを合わせるために 7(= 4 + 3) を掛ける.
内分点を E とし, 同じことをもう一度行えば, P の位置が求まる.]

(2) 四面体ABCDの体積をVとする.

AF : PF = 3 : 1　より　(四面体ABCD) : (四面体PBCD) = 3 : 1

よって　(四面体PBCD) $= \dfrac{1}{3}V$

BE : EC = 4 : 3,　DF : FE = 7 : 5,　AP : PF = 2 : 1　より

$$\begin{aligned}(\text{四面体PCDA}) &= \frac{2}{3}(\text{四面体FCDA})\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{12}(\text{四面体ECDA})\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{7}(\text{四面体ABCD}) = \frac{1}{6}V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{四面体PDAB}) &= \frac{2}{3}(\text{四面体FDAB})\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{12}(\text{四面体EDAB})\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{7}(\text{四面体ABCD}) = \frac{2}{9}V\end{aligned}$$

$$(\text{四面体PABC}) = \frac{2}{3}(\text{四面体FABC}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{12}(\text{四面体ABCD}) = \frac{5}{18}\mathrm{V}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}V : \frac{1}{6}V : \frac{2}{9}V : \frac{5}{18}V = \mathbf{6 : 3 : 4 : 5}$$

全体をVとおき，線分の比をもとに，各体積をVで表し，体積比を求める.
Vの底面を△BCD，高さをAFとして，底面積の比と高さの比を両方考慮する.
底面積が等しい四面体の体積比は，高さの比に等しい.
また，**高さが等しい四面体の体積比は，底面積の比に等しい.**
ABCDとPBCDの比は，底面積BCDが等しいから，高さの比ですぐ求まる.
本解は，PCDA → ABCDの流れで求めたスマートな記述である.
実際には，無理せず，**底面積の比と高さの比を別々に求める**とよい.
PCDAの底面積を△FCD，高さをAPと考える.
底面積について，BE : EC = 4 : 3より，△ECD : △BCD = 3 : 7
さらに，EF : FD = 5 : 7より，△FCD : △ECD = 7 : 12
よって，$\triangle\mathrm{FCD} = \dfrac{7}{12}\triangle\mathrm{ECD} = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{3}{7}\triangle\mathrm{BCD} = \dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{BCD}$
また，高さについて，AP : AF = 2 : 3
結局，**ABCDと比較し，PCDAの底面積は$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$，高さは$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$**となる.
したがって，(四面体PCDA) $= \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}$(四面体ABCD) $= \dfrac{1}{6}V$
他の体積も同様に考えていけばよい.
なお，平面と同様，$a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} + d\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \vec{0}$ のとき
PBCD : PCDA : PDAB : PABC = $\boldsymbol{a : b : c : d}$ となる(暗記).