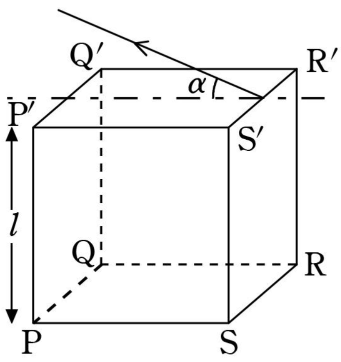
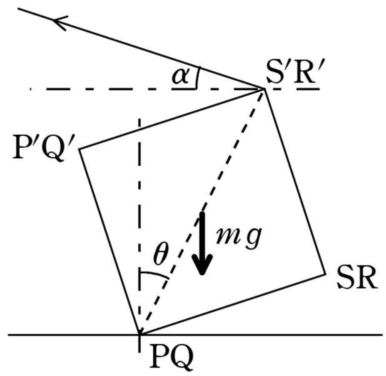
1 図のように，稜(りょう)の長さが l で，質量 m の均質な立方体を床に置き，立方体の上面の稜 S′R′ の中央に糸を結び，稜 S′R′ に垂直で水平とつねに角 α をなすよう斜め上方向に糸を引いて，平面 PQR′S′ が鉛直と角 θ をなす位置で静止させた (2 図)。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。



1 図



2 図

(1)　稜 PQ のまわりの重力のモーメントの大きさを求めよ。

(2)　糸の張力を T として，稜 PQ に床から作用する力のうちの

（ア）　垂直抗力の大きさを求めよ。

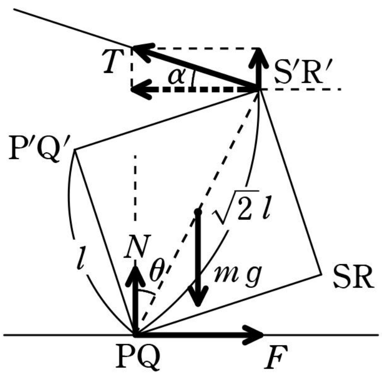
（イ）　静止摩擦力の大きさを求めよ。

(3)　稜 PQ のまわりの力のモーメントのつりあいから，張力 T の大きさを求めよ。

(4)　ここで，糸を水平 ($\alpha=0$) に保ちながら，立方体を 2 図から 1 図の状態にゆっくり戻した。このとき，θ が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで変化しても立方体はすべらずに，面 PQRS 全体が床に着いた。このことから，立方体と床との間の静止摩擦係数はいくら以上なければならないか，その値を求めよ。

解説

(1)　稜 PQ と稜 S′R′ 間の距離は $\sqrt{2}\,l$ であるので，稜 PQ のまわりの重力のモーメントの大きさは



$$mg\cdot\frac{\sqrt{2}\,l}{2}\cdot\sin\theta=\boldsymbol{\frac{mgl}{\sqrt{2}}\sin\theta}$$

(2)　垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを F とする。

（ア）　鉛直方向の力のつりあいを表す式は

$$T\sin\alpha+N-mg=0$$

ゆえに　$N=\boldsymbol{mg-T\sin\alpha}$

（イ）　水平方向の力のつりあいを表す式は

$F-T\cos\alpha=0$　　ゆえに　$F=\boldsymbol{T\cos\alpha}$

(3)　反時計まわりの力のモーメントを正にとる。

稜 PQ のまわりの力のモーメントのつりあいを表す式は

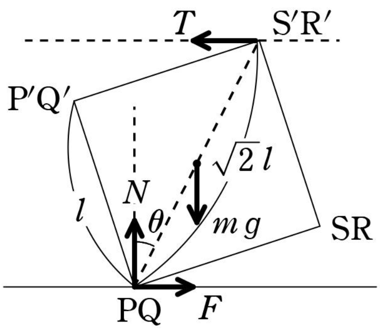
$$T\cos\alpha\cdot\sqrt{2}\,l\cos\theta+T\sin\alpha\cdot\sqrt{2}\,l\sin\theta-mg\cdot\frac{\sqrt{2}\,l}{2}\sin\theta=0$$

$$T(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=\frac{mg}{2}\sin\theta$$

$\cos(\alpha-\theta)\cdot T=\dfrac{mg}{2}\sin\theta$　　ゆえに　$T=\boldsymbol{\dfrac{mg\sin\theta}{2\cos(\alpha-\theta)}}$

(4)　水平方向の力のつりあいを表す式は

$F-T=0$　……①



鉛直方向の力のつりあいを表す式は

$N-mg=0$　……②

稜 PQ のまわりの力のモーメントのつりあいを表す式は

$T\cdot\sqrt{2}\,l\cos\theta-mg\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\sin\theta=0$　……③

③ 式より　　$T=\dfrac{mg\sin\theta}{2\cos\theta}=\dfrac{mg}{2}\tan\theta$

稜 PQ がすべらないための条件は，立方体と床との間の静止摩擦係数を μ とすると

$F\leqq\mu N$　　よって　$\mu\geqq\dfrac{F}{N}=\dfrac{T}{mg}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

θ が $\dfrac{\pi}{4}$ まで変化しても立方体がすべりださないためには

$\mu\geqq\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$\mu\geqq\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$