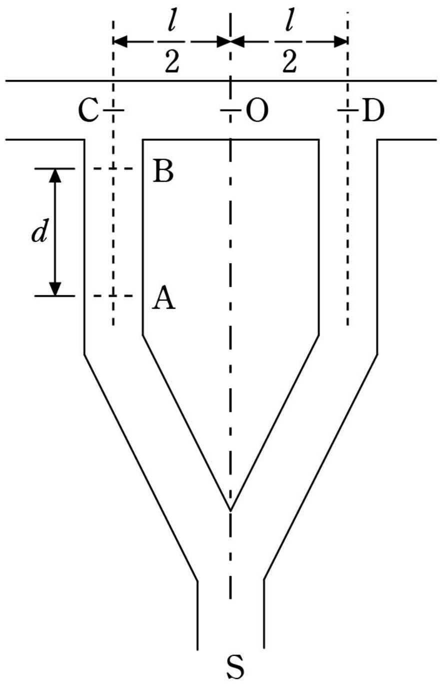
大きな水槽中に図のような水深 h の水路を作る。ただし，長さ d の区間 AB の水深は変えられる。水路の形は線 OS に関して左右対称である。水路の一端 S から振動数 f の水面波を送りこむ。この波の速さは水深の平方根に比例し，その波長は水路の幅より十分長く，AB 間の長さ d，CD 間の長さ l よりは十分短いとする。このとき波は水路中を正弦波として伝わるものとし，以下の設問に答えよ。



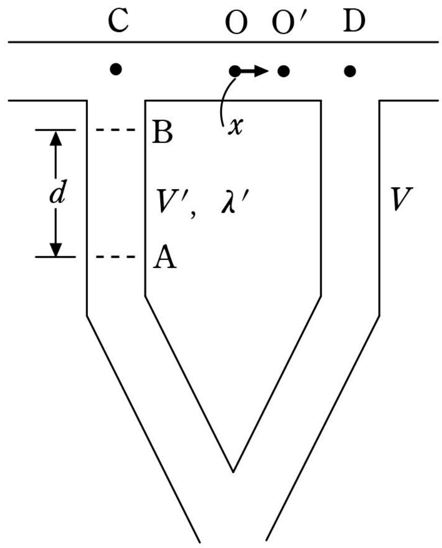
(1)　全水路で水深を h としたとき，点 O 近くで波長 λ の定常波が見られた。点 O はこの定常波の腹か節かを理由を付して答えよ。また，AB 間を進む波の速さ V を求めよ。

(2)　区間 AB の水深をゆっくり変えると定常波の腹や節の位置は徐々にずれる。水深が h' になったとき，O → D 方向に向かって測ったこのずれの距離は x となった。h' と h の比を求めよ。なお，深さが変わる所での波の反射は無視してよい。

(3)　区間 AB の水深を再び h にもどし，直線部分 COD に水を C から D の向きに速さ v で流す。流れは一様で，この直線部分以外には及ばないとする。C → D に進む波と D → C に進む波の波長をそれぞれ求めよ。また，この 2 つの波の点 O での位相の差を求めよ。ただし $V > v$ とする。

(4)　(3) で点 O が節となるような水流の速さ v の最小値を求めよ。

解説



(1)　点 O は S からの水路の長さが左右対称で等しいので，同じ位相の波が干渉し強めあい，定常波の**腹**となる。波の速さは　$V=f\lambda$

(2)　AB 間の水深が h' のときの波の速さを V'，波長を λ' とすると，波の速さは水深の平方根に比例するから，比例定数を k として

$$V=k\sqrt{h}\ ,\ V'=k\sqrt{h'}$$

よって　$\dfrac{V'}{V}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$　…… ①

また，f は変化しないから

$V=f\lambda$ より　$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{f\lambda'}{f\lambda}=\dfrac{\lambda'}{\lambda}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$　…… ②

S から O までの水路の長さを L とし，O の腹が x だけ D 側にずれ O′ に来たとする (右図)。

腹が O から O′ に移ったのだから，左側と右側から O′ に達する時間が同じであれば，同位相の波が O′ で強めあう。

SABCO′ を進む時間は　$\dfrac{L-d+x}{V}+\dfrac{d}{V'}$

SDO′ を進む時間は　$\dfrac{L-x}{V}$

$$\frac{L-d+x}{V}+\frac{d}{V'}=\frac{L-x}{V}\qquad ゆえに\quad \frac{d}{V'}=\frac{d-2x}{V}$$

よって　$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{d}{d-2x}$

これと ① を用いて　$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{d}{d-2x}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$

ゆえに　$\dfrac{h'}{h}=\left(\dfrac{d}{d-2x}\right)^2$

(3)　C → D に進む波の速さを V_1，波長を λ_1 とする。

$V_1=V+v$ から

$$\lambda_1=\frac{V_1}{f}=\frac{V+v}{f}=\frac{V}{f}+\frac{v}{f}=\lambda+\frac{V}{f}$$

D → C に進む波の速さを V_2，波長を λ_2 とする。

$V_2=V-v$ から

$$\lambda_2=\frac{V_2}{f}=\frac{V-v}{f}=\frac{V}{f}-\frac{v}{f}=\lambda-\frac{V}{f}$$

S から C，S からD の経路長は同じだから，C と D での位相は同じである。

点 O までの波の数は　D → O は　$\dfrac{\mathrm{DO}}{\lambda_2}=\dfrac{\frac{l}{2}}{\lambda_2}$

$$\mathrm{C} \to \mathrm{O}\ \text{は}\quad \frac{\mathrm{CO}}{\lambda_1} = \frac{\frac{l}{2}}{\lambda_1}$$

波の数が1つずれると位相が 2π ずれるから，求める位相差 θ は

$$\theta = 2\pi \times \left(\frac{l/2}{\lambda_2} - \frac{l/2}{\lambda_1}\right) = \pi l\left(\frac{f}{V-v} - \frac{f}{V+v}\right) = \pi l \frac{2fv}{V^2 - v^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\pi f l v}{(f\lambda)^2 - v^2}}$$

(4) (3)で求めた位相差が π の奇数倍であれば，点Oで弱めあい節ができる。$v=0$ のときは位相差が0だから，v が大きくなれば位相差も大きくなる。よって，v が最小で節になるのは，位相差が π（の1倍）のときであるから

$$\frac{2\pi f l v}{f^2\lambda^2 - v^2} = \pi \qquad \text{ゆえに}\quad v^2 - 2flv - f^2\lambda^2 = 0$$

$$\text{ゆえに}\quad v = -fl \pm \sqrt{(fl)^2 + (f\lambda)^2}$$

$v > 0$ だから　$\boldsymbol{v = f\left(\sqrt{l^2 + \lambda^2} - l\right)}$