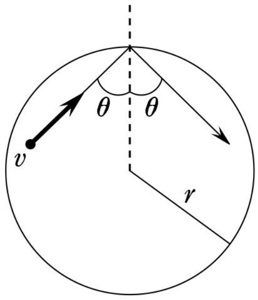
半径 r の球形の容器に，質量 m の単原子分子の理想気体が 1 mol 入っている。容器の中に存在する N_A (アボガドロ数) 個の分子が球形の壁と弾性衝突することで，圧力 P が生じるしくみを考える。



分子はさまざまな速さと方向をもって容器内で運動しているが，図のように，壁の法線方向と θ のなす角度で壁に衝突する速度 v の分子を考える。衝突後，壁の接線方向の速度は変化しないので，1 回の衝突でこの分子は壁に $\boxed{\text{ア}}\times mv$ の力積を与える。この分子は壁に衝突した後，次に衝突するまでに距離 $\boxed{\text{イ}}\times r$ だけ進むので，1 秒間あたりにこの分子が壁に与える力積は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。したがって，N_A 個の分子についての v^2 の平均を $<v^2>$ とすると，分子全体が壁に及ぼす力は $\boxed{\text{エ}}\times\dfrac{N_A m<v^2>}{r}$ となる。圧力 P を $<v^2>$ で表すと $P=\boxed{\text{オ}}\times\dfrac{N_A m<v^2>}{r^3}$ となるので，容器の体積を V とすれば，$PV=\boxed{\text{カ}}\times N_A m<v^2>$ となる。また，1 mol の理想気体の状態方程式は $PV=kN_AT$ なので (k はボルツマン定数，T は温度)，分子の運動エネルギーの平均値は $\dfrac{1}{2}m<v^2>=\boxed{\text{キ}}\times kT$ となって，温度 T に比例することがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢

① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\cos\theta$　⑤ $\sin\theta$

⑥ $\tan\theta$　⑦ $2\cos\theta$　⑧ $2\sin\theta$　⑨ $2\tan\theta$　⑩ $\dfrac{\cos\theta}{2}$

⑪ $\dfrac{\sin\theta}{2}$　⑫ $\dfrac{\tan\theta}{2}$　⑬ $\dfrac{1}{\cos\theta}$　⑭ $\dfrac{1}{\sin\theta}$　⑮ $\dfrac{1}{\tan\theta}$

⑯ $\dfrac{1}{2\cos\theta}$　⑰ $\dfrac{1}{2\sin\theta}$　⑱ $\dfrac{1}{2\tan\theta}$

$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢

① $\dfrac{mv^2}{r}$　② $\dfrac{mv^2}{2r}$　③ $\dfrac{2mv^2}{r}$　④ $\dfrac{mv^2\cos\theta}{r}$　⑤ $\dfrac{mv^2\sin\theta}{r}$

⑥ $\dfrac{mv^2}{r\cos\theta}$　⑦ $\dfrac{mv^2}{r\sin\theta}$　⑧ $\dfrac{mv^2}{\pi r}$　⑨ $\dfrac{mv^2}{2\pi r}$　⑩ $\dfrac{mv^2}{4\pi r}$

$\boxed{\text{エ}}$～$\boxed{\text{キ}}$ の選択肢

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{3}{2}$　⑦ $\dfrac{1}{3}$　⑧ $\dfrac{2}{3}$

⑨ $\dfrac{4}{3}$　⑩ π　⑪ 2π　⑫ $\dfrac{\pi}{2}$　⑬ $\dfrac{\pi}{3}$　⑭ $\dfrac{\pi}{4}$　⑮ $\dfrac{1}{\pi}$　⑯ $\dfrac{1}{2\pi}$

⑰ $\dfrac{1}{3\pi}$　⑱ $\dfrac{1}{4\pi}$

解説

（ア）　図１のように，球の中心を点 O とし，ある気体分子と壁との衝突点を点 P とする。気体分子は，弾性衝突をしてはね返る。O → P の向きを正にとれば，衝突前の分子の速度の法線成分は $v\cos\theta$，衝突後の速度の法線成分は $-v\cos\theta$ となる。このとき，分子が壁から受ける力積は $F\Delta t = mv' - mv$ より

$$-mv\cos\theta - mv\cos\theta = -2mv\cos\theta$$

したがって，分子が壁に与える力積は，作用・反作用の法則より，$2mv\cos\theta$ となる。

答えは，$\mathbf{2\cos\theta} \times mv$ より，⑦

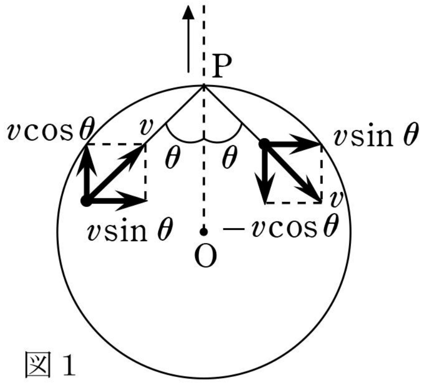


図１

（イ）　図２のように，次の衝突点を点 Q とする。

$\angle\mathrm{OPQ} = \angle\mathrm{OQP} = \theta$ より，$\mathrm{PQ} = 2r\cos\theta$

答えは，$2r\cos\theta = \mathbf{2\cos\theta} \times r$ より，⑦

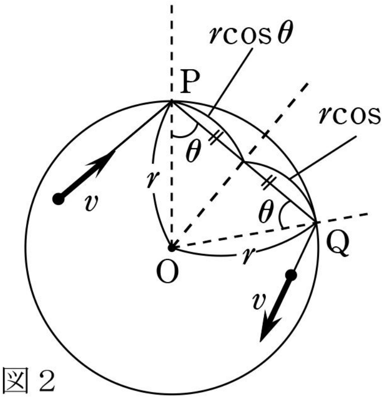


図２

（ウ）　この分子が１秒間に進む距離は $v \times 1 = v$ である。距離 $2r\cos\theta$ だけ進む毎に壁との衝突を繰り返すので，１秒間あたりの衝突回数は $\dfrac{v \times 1}{2r\cos\theta}$ である。したがって，１秒間あたりにこの分子が壁に与える力積は

$$2mv\cos\theta \times \frac{v}{2r\cos\theta} = \frac{mv^2}{r}$$

となる。　答えは，①

（エ）　１個の分子が１秒間あたりに壁に与える力積の平均は，$\dfrac{m<v^2>}{r}$ である。分子の数が N_A であれば，すべての分子が１秒間あたりに壁に与える力積は $N_A \times \dfrac{m<v^2>}{r}$ となる。「力積」は「力×時間」で定義される量なので，「1 秒間あたりの力積」とは「力」のことである。したがって，分子全体が壁に及ぼす力は $\dfrac{N_A m<v^2>}{r}$

答えは $\dfrac{N_A m<v^2>}{r} = \mathbf{1} \times \dfrac{N_A m<v^2>}{r}$ より，①

（オ）　圧力は，単位面積あたりにはたらく力の大きさで，$P = \dfrac{F}{S}$ である。球形の容器内壁の表面積は，$S = 4\pi r^2$ である。したがって，

$$P = \frac{\dfrac{N_A m<v^2>}{r}}{4\pi r^2} = \frac{N_A m<v^2>}{4\pi r^3}$$

答えは，$\dfrac{N_A m<v^2>}{4\pi r^3} = \mathbf{\dfrac{1}{4\pi}} \times \dfrac{N_A m<v^2>}{r^3}$ より，⑱

(カ)　球の体積は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ なので，

$$PV=\frac{N_\mathrm{A}m<v^2>}{4\pi r^3}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}N_\mathrm{A}m<v^2>$$

答えは，$\dfrac{1}{3}N_\mathrm{A}m<v^2>=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\times N_\mathrm{A}m<v^2>$ より，⑦

(キ)　$PV=\dfrac{1}{3}N_\mathrm{A}m<v^2>=kN_\mathrm{A}T$ から，

$$\frac{1}{2}m<v^2>=\frac{3}{2}kT$$

答えは，$\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\times kT$ より，⑥