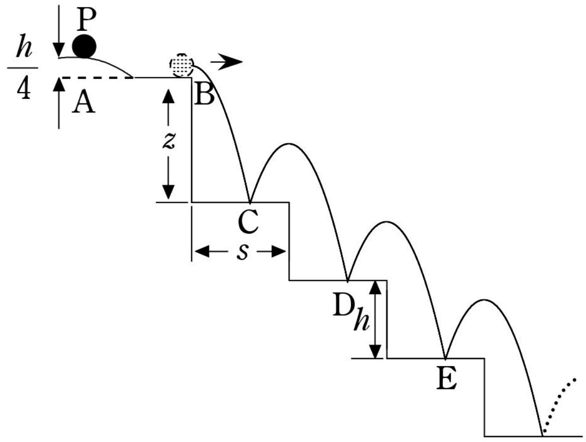
図のように，階段の最上段の地点Bから左方にはなめらかな登り斜面があり，B点より高さ$\frac{h}{4}$だけ高い場所に質量mの小さな球Pが静止している。また，B点から右方には最初の段差がzで，それ以降は幅s，段差hの一様な下り階段が続いている。階段の壁面はすべて鉛直で，床面はすべてなめらかで水平になっている。



いま，球PがA点から斜面にそってB点の方へすべり落ち，B点から水平方向に飛び出した。その後，球Pは階段の床面C，D，Eと次々に衝突をくり返しながら，階段を落下した。球Pと床面は，はねかえり係数(反発係数)e $(0<e<1)$の非弾性衝突をするものとし，重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。

(1) 球Pが点Bに達したときの速さはいくらか。

(2) 球Pが点Bから落下して最初の床面Cに衝突する直前に，球Pの速度の鉛直成分はいくらになるか。

(3) このとき，球Pが最初の床面Cを飛び越さない条件を求めよ。

(4) 球Pが床面Cではねかえされるときの速度の鉛直成分はいくらか。

(5) この後，球Pが再び床面Cに落下しないで直接床面Dに落下する条件を求めよ。

(6) このように，球Pが階段の各床面に1度だけ衝突して次の床面に落下することを無限に続けるとき，k番目の床面に衝突する直前の球Pの速度の水平成分はいくらになるか。

(7) また，k番目の床面に衝突する直前の球Pの速度の鉛直成分はいくらになるか。

(8) 以上の結果を利用して階段の最初の段差zと2段目以降の段差hとの比を求め，zの方が大きいことを示せ。

(9) また，階段の床面の幅sと段差hとの比を求め，幅sの方が大きいことを示せ。

解説

問題の図の右向きに x 軸，上向きに y 軸をとる。B で水平にとび出した後は，x 方向には等速直線運動し，床面で衝突をくりかえしても変わらない。一方 y 方向には初速 0, 加速度 $-g$ の等加速度運動をし，床面と衝突したとき，速度の y 成分は逆向きで e 倍になる。

(1) 運動エネルギーの式 $\dfrac{1}{2}mv^2$ と重力による位置エネルギーの式 mgh を用いて，AB 間で力学的エネルギー保存の式をたてる。B を高さの基準，求める速さを v_{B} とすると

$$mg\cdot\frac{h}{4}=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2 \qquad \text{よって} \quad v_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

(2) 鉛直方向について見ると，初速度 0，加速度 $-g$，変位 $-z$ の等加速度運動なので BC 間の所要時間 t_{BC} は，変位の式 $y=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ より

$$-z=0\cdot t_{\mathrm{BC}}+\frac{1}{2}(-g){t_{\mathrm{BC}}}^2 \qquad t_{\mathrm{BC}}=\sqrt{\frac{2z}{g}}$$

速度の式 $v=v_0+at$ にこの t_{BC} を代入すると，求める C 点の速度の y 成分 $v_{\mathrm{C}y}$ は

$$v_{\mathrm{C}y}=0+(-g)\sqrt{\frac{2z}{g}}=-\sqrt{2gz}$$

したがって，**下向きに $\sqrt{2gz}$**

(3) 水平方向について見ると，B での速度のままで等速直線運動をするので，BC 間の水平距離 x_{BC} は

$$x_{\mathrm{BC}}=v_{\mathrm{B}}t_{\mathrm{BC}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}\times\sqrt{\frac{2z}{g}}=\sqrt{hz}$$

これが s を越えなければ床面 C に衝突するので

$$\boldsymbol{s\geqq\sqrt{hz}}$$

(4) 求める速度成分を $v_{\mathrm{C}y}'$ とすると，反発係数の定義式 $-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}=e$ より

$$-\frac{v_{\mathrm{C}y}'-0}{v_{\mathrm{C}y}-0}=e$$

よって　$v_{\mathrm{C}y}'=-ev_{\mathrm{C}y}=-e\cdot(-\sqrt{2gz})=e\sqrt{2gz}$

よって，**上向きに $e\sqrt{2gz}$**

(5) まず，再び C 上に落下しない条件を求める。CD 間の運動を鉛直方向について見ると，初速度 $e\sqrt{2gz}$，加速度 $-g$ の等加速度運動で，再び床面 C の高さ（すなわち C からの変位 0 の点）に達する時間 t_{CC} は，(2) と同じく変位の式より

$$y=e\sqrt{2gz}\,t_{\mathrm{CC}}+\frac{1}{2}(-g){t_{\mathrm{CC}}}^2=0$$

よって　$t_{\mathrm{CC}}=2e\sqrt{\dfrac{2z}{g}}$

この点までの，B からの水平距離が s を越えれば，球 P は再び面 C に衝突することはないので

$$s < x_{\mathrm{BC}} + v_{\mathrm{B}} t_{\mathrm{CC}} = \sqrt{hz} + \sqrt{\frac{gh}{2}} \cdot 2e\sqrt{\frac{2z}{g}} = (1+2e)\sqrt{hz} \quad \cdots\cdots ①$$

次に床面 D 上に落下する条件を求める。CD 間の鉛直方向の運動について，D は C から変位 $-h$ の点なので，CD 間の時間 t_{CD} は前述と同様に変位の式より

$$-h = e\sqrt{2gz}\, t_{\mathrm{CD}} + \frac{1}{2}(-g) t_{\mathrm{CD}}{}^2$$

t_{CD} について解くと

$$t_{\mathrm{CD}} = e\sqrt{\frac{2z}{g}} \pm \sqrt{\frac{2(e^2 z + h)}{g}}$$

$t_{\mathrm{CD}} > 0$ より負符号は不適。BD 間の水平距離が $2s$ を越えると D 面をとび越してしまうので，

$$\begin{aligned} 2s &\geqq x_{\mathrm{BC}} + v_{\mathrm{B}}\, t_{\mathrm{CD}} \\ &= \sqrt{hz} + \sqrt{\frac{gh}{2}} \left\{ e\sqrt{\frac{2z}{g}} + \sqrt{\frac{2(e^2 z + h)}{g}} \right\} \\ &= \sqrt{h}\left\{ (1+e)\sqrt{z} + \sqrt{e^2 z + h} \right\} \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①，② をともに満たせば題意にあうので

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{h}}{2}\left\{ (1+e)\sqrt{z} + \sqrt{e^2 z + h} \right\} \leqq s < (1+2e)\sqrt{hz}}$$

(6)　速度の水平成分は，B でとび出した後は一定に保たれ，床に摩擦がなければ衝突によっても変わらない。したがって　$v_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{gh}{2}}}$ のまま。

(7)　この運動が無限に続くためには，CD 間，DE 間，… の軌道が全く同じ形である必要がある。このことから，各面に衝突する直前の速度の鉛直成分も毎回 C 点のときと同じでなければならない。したがって (2) と同じく**下向きに** $\boldsymbol{\sqrt{2gz}}$

(8)　D 点に衝突する直前の速度の鉛直成分を $v_{\mathrm{D}y}$ とする。CD 間の鉛直方向の運動について速度の式 $v = v_0 + at$ を適用すると，

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{D}y} &= v_{\mathrm{C}y}' + (-g) t_{\mathrm{CD}} \\ &= e\sqrt{2gz} - g\left\{ e\sqrt{\frac{2z}{g}} + \sqrt{\frac{2(e^2 z + h)}{g}} \right\} \\ &= -\sqrt{2g(e^2 z + h)} \end{aligned}$$

(7) で述べたように，これが C 点に衝突する直前の速度の鉛直成分 $v_{\mathrm{C}y}$ と等しいので

$$-\sqrt{2gz} = -\sqrt{2g(e^2 z + h)}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\frac{z}{h} = \boldsymbol{\frac{1}{1-e^2}} > 1 \ (0 < e < 1) \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{z > h}$$

(9)　CD 間の水平距離がちょうど面の幅 s と等しくなるので

$$\begin{aligned} s &= v_{\mathrm{B}}\, t_{\mathrm{CD}} \\ &= \sqrt{\frac{gh}{2}} \left\{ e\sqrt{\frac{2z}{g}} + \sqrt{\frac{2(e^2 z + h)}{g}} \right\} \\ &= e\sqrt{hz} + \sqrt{h(e^2 z + h)} \end{aligned}$$

よって(8)の比も利用して

$$\begin{aligned}\frac{s}{h}&=\frac{e\sqrt{hz}}{h}+\frac{\sqrt{h(e^2z+h)}}{h}\\&=e\sqrt{\frac{z}{h}}+\sqrt{e^2\frac{z}{h}+1}\\&=e\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}+\sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}+1}\\&=e\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}+\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}\\&=(1+e)\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{1+e}}{\boldsymbol{1-e}}}>1\quad(0<e<1)\end{aligned}$$

よって　$s>\boldsymbol{h}$